ESERCIZI DI CALCOLO COMBINATORIO

(*G.T.Bagni*)

Sintesi delle nozioni teoriche da utilizzare

a) Dati n elementi e $k \leq n$, si dicono ***disposizioni semplici*** di n elementi di classe k tutti i raggruppamenti ottenuti scegliendo k elementi tra gli n disponibili, in modo che due raggruppamenti siano considerati distinti quando differiscono per almeno uno dei componenti oppure per l'ordine secondo il quale essi sono allineati.

b) $D_{n,\,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

$D_{18,\,2} = 18 \cdot 17 = 306$.

c) Dati n elementi, si dicono ***permutazioni semplici*** tutti i raggruppamenti ottenuti scegliendo tutti gli n elementi disponibili, in modo che due raggruppamenti siano considerati distinti quando differiscono per l'ordine secondo il quale essi sono allineati.

d) $P_n = n!$

$P_3 = 3! = 6$; $P_5 = 5! = 120$.

e) Dati n elementi e $k \leq n$, si dicono ***combinazioni semplici*** di n elementi di classe k tutti i raggruppamenti ottenuti scegliendo k elementi tra gli n disponibili, in modo che due raggruppamenti siano considerati distinti soltanto quando differiscono per almeno uno dei componenti.

f) $C_{n,\,k} = \dfrac{D_{n,k}}{P_k} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n!}$

$C_{9,\,4} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$.

Esercizio risolto

Si calcoli il numero degli anagrammi che possono essere formati con le lettere della parola "Roma".

(Naturalmente, il calcolo del numero dei possibili anagrammi non può preoccuparsi dell'eventuale "mancanza di significato" di alcune sequenze di lettere: ad esempio, la parola "rmoa", pur non avendo alcun significato in lingua italiana, deve essere considerata, dal punto di vista combinatorio, tra i possibili anagrammi di "Roma").

Risoluzione

Si tratta di valutare in quanti modi possono essere disposte tutte le quattro lettere "R", "O", "M", "A". Quindi è sufficiente calcolare il numero delle permutazioni semplici di quattro elementi:

$$P_4 = 4! = 24$$

Esercizio risolto

Quante partite di scacchi diverse possono essere giocate da sei giocatori?

Risoluzione

Si deve valutare il numero $C_{6,2}$ delle combinazioni semplici di 6 elementi di classe 2 (presi 2 a 2: una partita a scacchi viene infatti giocata da due giocatori):

$$C_{6,2} = \frac{D_{6,2}}{P_2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Esercizi proposti

1. Quanti numeri costituiti da cinque cifre diverse possono essere scritti (utilizzando le cifre da 0 a 9)?

[Attenzione: un numero con uno o più zeri all'inizio...]

2. Ad un torneo partecipano 10 squadre; la formula della manifestazione prevede la disputa di quattro incontri tra ciascuna coppia di squadre A, B: due nella sede della squadra A, due nella sede della squadra B. Quante partite verranno giocate, nellàmbito di tale torneo?

[$2 \cdot D_{10,\,2} = 2 \cdot 10 \cdot 9 = 180$]

3. Quanti diversi incontri di pugilato possono essere organizzati tra sette pugili?

[...]

4. Quante diverse classifiche finali può avere una gara di corsa alla quale partecipano dieci atleti (escludendo gli ex-aequo)?

[...]

5. Sei persone hanno a disposizione sei sedie: in quanti modi diversi le possono occupare?

[720]

6. Sei persone devono occupare sei sedie (quindi una di esse rimane in piedi!): in quanti modi diversi lo possono fare?

[720]

7. Sei persone hanno a disposizione quattro sedie: in quanti modi diversi le possono occupare?

[...]

8. Quanti anagrammi che iniziano con la lettera "M" possono essere compo ste con le lettere della parola "mela"? (Si considerino parole tutti gli allineamenti di lettere, indipendentemente dal significato).

[...]

9. Quanti diversi "equipaggi" possono occupare (indipendentemente dall'ordine) una barca a tre posti, scelti tra sette persone?

[...]

10. Il numero delle possibili classifiche finali di una gara con dieci o più atleti (escludendo gli ex-aequo) è certamente divisibile per 10. Perché? Anche se *n* è non minore di 5, il numero delle possibili classifiche finali di una gara con *n* atleti

(escludendo gli ex-aequo) è certamente divisibile per 10. Perché? Il numero delle possibili classifiche finali di una gara con un numero n di concorrenti (escludendo gli ex-aequo), essendo n un numero naturale maggiore di 1, può essere dispari? Perché?

[Se n è il numero di concorrenti, le possibili classifiche finali sono $n!$ Dunque, se n è maggiore di 1...]

11. Ad un convegno partecipano 21 persone. Ciascuno dei partecipanti stringe la mano a ciascuno degli altri. Quante sono state complessivamente le strette di mano?
[(*Olimpiadi della Matematica*, Gara di Cortona, 1991) 210]

12. In un torneo di tennis, 8 persone decidono di giocare degli incontri di doppio (cioè due contro due) in tutti i modi possibili. Quanti incontri ci sono nell'intero torneo? (A) 1680 (B) 126 (C) 1260 (D) 210 (E) 64

(*Olimpiadi della Matematica*, Gara senior, 1993)

13. Il numero delle disposizioni semplici di n oggetti di classe k:

- o A. Coincide con il numero delle permutazioni semplici di n oggetti se $n = k$.
- o B. Coincide con il numero delle permutazioni semplici di n oggetti se $n>k$.
- o C. Coincide con il numero delle permutazioni semplici di n oggetti se $n<k$.
- o D. Nessuna delle precedenti risposte è esatta.

14. Il numero delle combinazioni semplici di n oggetti di classe k:

- o A. Non coincide in alcun caso con il numero delle disposizioni semplici di n oggetti di classe k.
- o B. Coincide con in numero delle disposizioni semplici di n oggetti di classe k solo se $n = k = 1$.
- o C. Nessuna delle precedenti risposte è esatta.

Esercizio risolto

Risolvere l'equazione, nell'incognita x naturale: $\binom{x}{3}-\binom{x}{5} = 0$.

Risoluzione

Poniamo innanzitutto le condizioni: $x \in \mathbf{N}$ e $x \geq 5$. In base alla definizione di coefficiente binomiale, possiamo scrivere l'equazione $\binom{x}{3}=\binom{x}{5}$ nella forma:

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{3!} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{5!}$$

e, semplificando grazie alle condizioni poste, giungiamo a: $4 \cdot 5 = (x-3)(x-4)$ da cui segue l'unica soluzione (accettabile): $x = 8$

[Risposte degli esercizi a risposta multipla: 12. D; 13. A; 14. C]

ESERCIZI DI PROBABILITÀ

(*G.T. Bagni*)

1. In un'urna ci sono cinque palline rispettivamente contrassegnate dai numeri 1, 2, 3, 4, 5; in un'altra urna ci sono cinque palline rispettivamente contrassegnate dai numeri 6, 7, 8, 9, 10. Si estrae una pallina da ciascuna urna. Trovare la probabilità che la somma dei numeri delle palline estratte sia:

(a) non minore di 7
(b) uguale a 11
(c) non maggiore di 11

[(a) 1; (b) 1/5; (c) 3/5]

2. In una lotteria ci sono 1000 biglietti, 500 dei quali vincenti e 500 non vincenti. Acquistiamo due biglietti. Qual è la probabilità che essi siano entrambi vincenti?

[499/1998]

3. Un'urna contiene 10 palline bianche, 15 nere, 20 blu e 25 rosse. Trovare la probabilità che una pallina estratta sia:

(a) bianca o nera
(b) blu o rossa
(c) bianca, nera o blu

[(a) 5/14; (b) 9/14; (c) 9/14]

4. Un'urna contiene 2 palline bianche e 10 nere; una seconda urna contiene 8 palline bianche e 4 nere. Estraiamo una pallina da ciascuna urna. Determinare la probabilità che:

(a) entrambe le palline siano bianche
(b) una pallina sia bianca e l'altra nera
(c) entrambe le palline siano nere

[(a) 1/9; (b) 11/18; ...]

5. Un'urna contiene 2 pallina bianca, 2 rosse e 3 blu; una seconda urna contiene 2 palline bianche, 6 rosse e 4 blu. Estraiamo una pallina da ciascuna urna. Qual è la probabilità di non estrarre alcuna pallina blu? E qual è la probabilità di estrarre entrambe le palline di colore blu?

[1/3; …]

6. Lanciamo una moneta sei volte. Qual è la probabilità di ottenere testa non più di tre volte? E di ottenere sempre croce?

[21/32; …]

7. Abbiamo quattro urne. Ciascuna di esse contiene 5 palline bianche e 15 nere. Estraiamo una pallina da ciascuna urna. Qual è la probabilità di estrarre due palline bianche e due nere? E di estrarre tutte palline nere?

[27/128; …]

8. Determinare la probabilità che in una famiglia con cinque figli tre di essi siano maschi e i restanti due siano femmine. E qual è la probabilità che il primogenito sia femmina?

[5/16; …]

Esercizio risolto

In una stanza, ci sono due urne, una bianca ed una nera, entrambe contenenti caramelle di liquerizia e di menta. A Pierino, piacciono le caramelle di liquerizia e *non* piacciono quelle di menta.

In particolare, ci sono:

Stanza 1

Urna bianca	Caramelle liquerizia:	50
	Caramelle menta:	60
Urna nera	Caramelle. liquerizia:	30
	Caramelle menta:	40

Domanda 1. Pierino vuole estrarre una caramella da un'urna. Pensi che sia meglio, per lui, estrarre la caramella dall'urna b ianca o dall'urna nera?

Consideriamo quindi due diverse urne, in un'altra stanza, ancora una bianca ed una nera, contenenti:

Stanza 2

Urna bianca	Caramelle liquerizia:	60
	Caramelle menta:	30
Urna nera	Caramelle liquerizia:	90
	Caramelle menta:	50

Domanda 2. Pierino vuole estrarre una caramella da un'urna. Pensi che sia meglio, per lui, estrarre la caramella dall'urna bianca o dall'urna nera?

Stanza 3.

Entrambe le urne bianche delle stanze precedenti vengono travasate in una nuova grande urna bianca ed entrambe le urne nere in una nuova grande urna nera.

Domanda 3. Pierino vuole estrarre una caramella da una di queste grandi urne. Pensi che sia meglio, per lui, estrarre la caramella dall'urna bianca o dall'urna nera?

Risoluzione

La risposta corretta alle domande 1 e 2 fa riferimento all'urna bianca. Infatti si calcola:

Stanza 1.

prob. di ottenere una car. di liquerizia dall'urna *bianca*: $\frac{50}{110} = 0,45\ldots$

prob. di ottenere una car. di liquerizia dall'urna *nera*: $\frac{30}{70} = 0,42\ldots$

Stanza 2.

prob. di ottenere una car. di liquerizia dall'urna *bianca*: $\frac{60}{90} = 0,66\ldots$

prob. di ottenere una car. di liquerizia dall'urna *nera*: $\frac{90}{140} = 0,64\ldots$

Per quanto riguarda le urne nella stanza 3, osserviamo che i numeri totali di caramelle sono:

Stanza 3.

Urna bianca	Car. liquerizia: 110	Car. menta: 90
Urna nera	Car. liquerizia: 120	Car. menta: 90

Dunque le probabilità sono:

Stanza 3.

prob. di ottenere una car. di liquerizia dall'urna *bianca*: $\frac{110}{200} = 0,55\ldots$

prob. di ottenere una car. di liquerizia dall'urna *nera*: $\frac{120}{210} = 0,57\ldots$

Pertanto per quanto riguarda quest'ultimo caso, la migliore scelta per Pierino è di estrarre la caramella dall'urna *nera.*